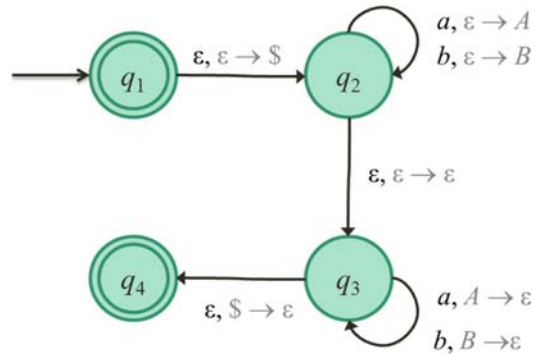


Φροντιστήριο 7 – Λύσεις

Άσκηση 1

Θεωρήστε το πιο κάτω αυτόματο στοιβάς:



- (α) Να εξηγήσετε με λόγια ποια γλώσσα αναγνωρίζεται από το αυτόματο.
 (β) Να δώσετε τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου.
 (γ) Να δείξετε όλα τα μονοπάτια που αντιστοιχούν στην ανάγνωση των λέξεων aab , $aabb$, $aabbb$.
 (δ) Να δείξετε ότι οι λέξεις $aaaa$ και $baab$ ανήκουν στη γλώσσα του αυτομάτου.

Λύση

(α) Το αυτόματο αναγνωρίζει τη γλώσσα που περιέχει όλες τις καρκινικές λέξεις (παλίνδρομα) άρτιου μήκους.

(β) Τυπικά το αυτόματο ορίζεται ως εξής: $(\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \{A, B, \$\}, \delta, q_1, \{q_1, q_4\})$ όπου η συνάρτηση μεταβάσεων δ ορίζεται ως:

$$\delta(q_1, \epsilon, \epsilon) = \{(q_2, \$)\}$$

$$\delta(q_2, a, \epsilon) = \{(q_2, A)\}$$

$$\delta(q_2, b, \epsilon) = \{(q_2, B)\}$$

$$\delta(q_2, \epsilon, \$) = \{(q_3, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_3, a, A) = \{(q_3, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_3, b, B) = \{(q_3, \epsilon)\}$$

$$\delta(q_3, \epsilon, \$) = \{(q_4, \epsilon)\}$$

(γ) Θα δείξουμε τα μονοπάτια αναπαριστώντας τις καταστάσεις με τριάδες της μορφής (q, w, s) όπου q είναι η κατάσταση, w η λέξη προς αναγνώριση και s η στοιβά.

- aab
 - $(q_1, aab, \epsilon) \rightarrow (q_2, aab, \$) \rightarrow (q_2, ab, A\$) \rightarrow (q_2, b, AA\$) \rightarrow (q_2, \epsilon, BAA\$) \rightarrow (q_3, \epsilon, BAA\$)$
 - $(q_1, aab, \epsilon) \rightarrow (q_2, aab, \$) \rightarrow (q_2, ab, A\$) \rightarrow (q_2, b, AA\$) \rightarrow (q_3, b, AA\$)$

- $(q_1, aab, \epsilon) \rightarrow (q_2, aab, \$) \rightarrow (q_2, ab, A\$) \rightarrow (q_3, ab, A\$) \rightarrow (q_3, b, \$) \rightarrow (q_4, b, \epsilon)$
- $(q_1, aab, \epsilon) \rightarrow (q_2, aab, \$) \rightarrow (q_3, aab, \$)$

• *aabb*

- $(q_1, aabb, \epsilon) \rightarrow (q_2, aabb, \$) \rightarrow (q_2, abb, A\$) \rightarrow (q_2, bb, AA\$) \rightarrow (q_2, b, BAA\$) \rightarrow (q_2, \epsilon, BBAA\$) \rightarrow (q_3, \epsilon, BBAA\$)$
- $(q_1, aabb, \epsilon) \rightarrow (q_2, aabb, \$) \rightarrow (q_2, abb, A\$) \rightarrow (q_2, bb, AA\$) \rightarrow (q_2, b, BAA\$) \rightarrow (q_3, b, BAA\$) \rightarrow (q_3, \epsilon, AA\$)$
- $(q_1, aabb, \epsilon) \rightarrow (q_2, aabb, \$) \rightarrow (q_2, abb, A\$) \rightarrow (q_2, bb, AA\$) \rightarrow (q_3, bb, AA\$)$
- $(q_1, aabb, \epsilon) \rightarrow (q_2, aabb, \$) \rightarrow (q_2, abb, A\$) \rightarrow (q_3, abb, A\$) \rightarrow (q_3, bb, \$) \rightarrow (q_4, bb, \epsilon)$
- $(q_1, aabb, \epsilon) \rightarrow (q_2, aabb, \$) \rightarrow (q_3, aabb, \$) \rightarrow (q_4, aabb, \epsilon)$

Άσκηση 2

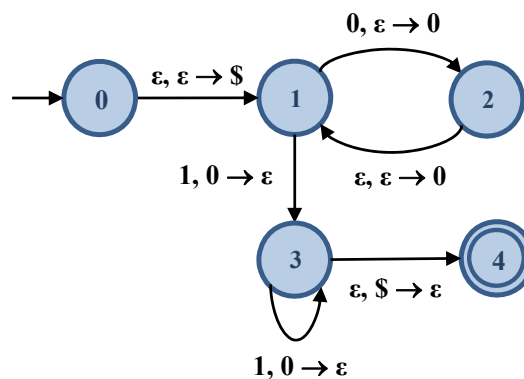
Να κατασκευάσετε αυτόματα που να αναγνωρίζουν τις πιο κάτω γλώσσες.

(α) $\{0^n 1^{2n} \mid n > 0\}$

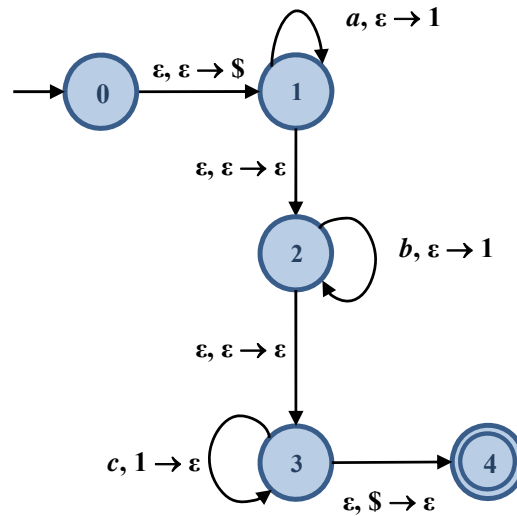
(β) $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ και } i + j = k\}$

Λύση

(α)



(β)



Άσκηση 3

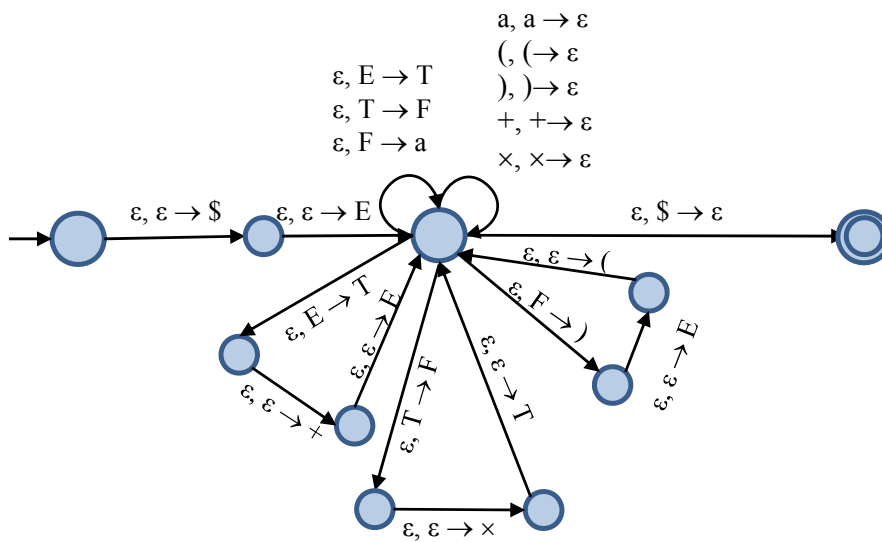
Για κάθε μια από τις πιο κάτω γραμματικές, να κατασκευάσετε ένα ισοδύναμο αυτόματο στοιβάς.

(α) $E \rightarrow E + T \mid T$
 $T \rightarrow T \times F \mid F$
 $F \rightarrow (E) \mid a$

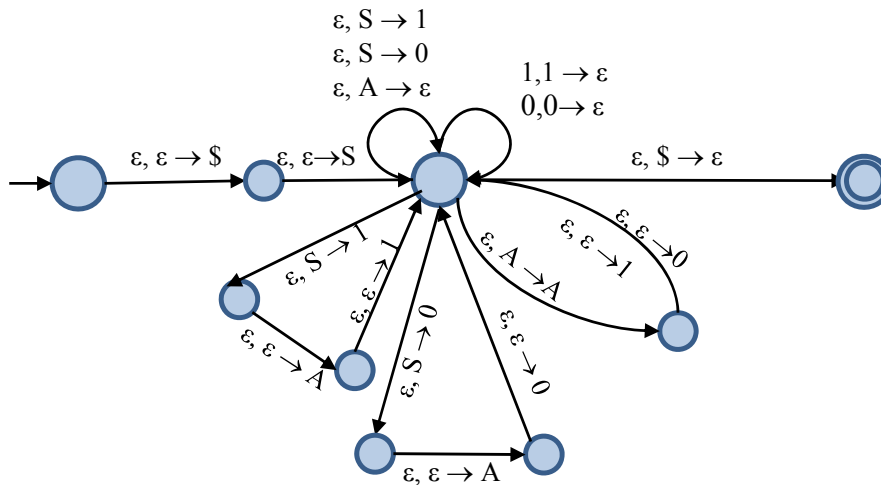
(β) $S \rightarrow 1A1 \mid 0A0 \mid 1 \mid 0$
 $A \rightarrow 1A \mid 0A \mid \epsilon$

Λύση

(α)



(β)



Άσκηση 4

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι ασυμφραστικές αιτιολογώντας με ακρίβεια τις απαντήσεις σας.

(α) $\{a^n \# a^{2n} \# a^{3n} \mid n > 0\}$

(β) $\{a^i b^j c^k \mid k = \max(i, j)\}$

Λύση

(α) $\{a^n \# a^{2n} \# a^{3n} \mid n > 0\}$

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η L_1 είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει p , το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από p να ικανοποιεί την ιδιότητα που περιγράφεται στο λήμμα.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = a^p \# a^{2p} \# a^{3p}$ και ας ονομάσουμε τα τμήματα της λέξης ως A, B, Γ, όπου $w = A \# B \# \Gamma$, και $A = a^p$, $B = a^{2p}$, $\Gamma = a^{3p}$.

Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, $w = uvxyz$ έτσι ώστε η υπολέξη vxy περιέχει το πολύ p σύμβολα ($|vxy| \leq p$), τουλάχιστον μία από τις v και y να είναι μη κενή ($|vy| > 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη των υπολέξεων v και y να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^i xy^i z \in L_1, i \geq 0$).

Αφού $|vxy| \leq p$, τότε η λέξη αυτή δεν μπορεί να εκτείνεται σε περισσότερα από δύο τμήματα της λέξης. Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις.

- Αν η vxy εκτείνεται μόνο στο τμήμα A, τότε τα v και y θα αποτελούνται μόνο από a . Επομένως, αν αντλήσουμε τα τμήματα v και y , η λέξη που θα προκύψει δεν θα ανήκει στη γλώσσα μας: $uv^2 xy^2 z = a^{p+\mu+\lambda} \# a^{2p} \# a^{3p} \notin L_1$, για $\mu = |v|$, $\lambda = |y|$.
- Το ίδιο επιχειρήμα μπορεί να εφαρμοστεί για να δείξουμε ότι, αν η vxy εκτείνεται σε ένα από τα τμήματα B και Γ τότε, και πάλι, η λέξη δεν επιδέχεται άντλησης.

- Αν η vxy ξεκινά από το τμήμα A και εκτείνεται πέραν αυτού, τότε άντληση των τμημάτων v και y θα έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή του πλήθους των συμβόλων που υπάρχουν στο A , δυνατόν τη μεταβολή του πλήθους των εμφανίσεων του συμβόλου $\#$ όπως επίσης και τη μεταβολή του πλήθους των a στο τμήμα B . Σε κάθε περίπτωση η προκύπτουσα λέξη δεν θα ανήκει στη γλώσσα αφού το μέγεθος του τμήματος Γ θα παραμείνει σταθερό.
- Το ίδιο επιχειρήμα μπορεί να εφαρμοστεί για να δείξουμε ότι, αν η vxy ξεκινά από το τμήμα B εκτείνεται πέραν αυτού τότε, και πάλι, η λέξη δεν επιδέχεται άντλησης.
- Τέλος, παρατηρούμε ότι, αν η vxy ξεκινά από το σύμβολο $\#$, τότε άντληση των τμημάτων v και y θα έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή των εμφανίσεων του συμβόλου $\#$ που συνεπάγεται ότι η λέξη δεν θα ανήκει στη γλώσσα.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα Λ_1 είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η Λ_1 είναι μη ασυμφραστική.

(β) $\Lambda_2 = \{a^i b^j c^k \mid k = \max(i, j)\}$

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η Λ_2 είναι ασυμφραστική. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα της Άντλησης, υπάρχει p , το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιο ώστε κάθε λέξη της γλώσσας με μήκος μεγαλύτερο από p να ικανοποιεί την ιδιότητα του λήμματος.

Ας επιλέξουμε τη λέξη $w = a^p b^p c^p$. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα, $w = uvxyz$ έτσι ώστε η υπολέξη vxy περιέχει το πολύ p σύμβολα ($|vxy| \leq p$), τουλάχιστον μία από τις v και y να είναι μη κενή ($|vy| > 0$) και οποιαδήποτε ταυτόχρονη επανάληψη των υπολέξεων v και y να διατηρεί την προκύπτουσα λέξη εντός της γλώσσας ($uv^i xy^j z \in \Lambda_2, i \geq 0$).

Αφού $|vxy| \leq p$, τότε η λέξη αυτή δεν μπορεί να εκτείνεται σε περισσότερα από δύο τμήματα της λέξης. Διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις.

- Αν η vxy εκτείνεται μόνο στο τμήμα a^p , τότε τα v και y θα αποτελούνται μόνο από a . Επομένως, αν αντλήσουμε τα τμήματα v και y , η λέξη που θα προκύψει δεν θα ανήκει στη γλώσσα: $w' = uv^2 xy^2 z = a^{p+\lambda+\mu} b^p c^p$ όπου $\lambda = |v|$, $\mu = |y|$ και προφανώς $w' \notin \Lambda_2$.
- Το ίδιο επιχειρήμα μπορεί να εφαρμοστεί δείχνοντας ότι αν η vxy περιέχει μόνο b ή μόνο c , τότε η λέξη δεν θα επιδέχεται άντλησης.
- Αν η vxy εκτείνεται στα δύο συνεχόμενα τμήματα a^p και b^p , τότε τα v και y θα αποτελούνται τόσο από a όσο και από b . Επομένως, αν αφαιρέσουμε τα τμήματα v και y , η λέξη που θα προκύψει, $w' = uv^0 xy^0 z$, δεν θα ανήκει στη γλώσσα μας αφού τα δύο πρώτα τμήματα θα περιέχουν λιγότερα σύμβολα ενώ το τρίτο τμήμα θα εξακολουθεί να περιέχει p και όχι $\max(i, j)$ c .
- Το ίδιο επιχειρήμα μπορεί να εφαρμοστεί δείχνοντας ότι αν η vxy εκτείνεται στα συνεχόμενα τμήματα b^p και c^p τότε, και πάλι, η λέξη δεν θα επιδέχεται άντλησης.

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η υπόθεσή μας ότι η γλώσσα Λ_2 είναι ασυμφραστική ήταν εσφαλμένη.

Συμπέρασμα: Η Λ_2 είναι μη ασυμφραστική.