Διάλεξη 15: Αλγόριθμοι Ταξινόμησης

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Ο αλγόριθμος «Γρήγορης Ταξινόμησης» - QuickSort

Έμμεση Ταξινόμηση

Εξωτερική Ταξινόμηση

Διδάσκων: Δημήτρης Ζεϊναλιπούρ

Γρήγορη Ταξινόμηση (QuickSort)

- Η ***γρήγορη ταξινόμηση (QuickSort)*** είναι, όπως ο Mergesort, διαδικασία ***διαίρει και βασίλευε*** (divide and conquer, δηλ. αναδρομική διαδικασία όπου το πρόβλημα μοιράζεται σε μέρη τα οποία λύνονται ξεχωριστά, και μετά οι λύσεις συνδυάζονται.).
- Δεν χρειάζεται βοηθητικό πίνακα (όπως στην Mergesort)
- Πρακτικά, ο πιο γρήγορος αλγόριθμος.
- Στη χείριστη περίπτωση ο αλγόριθμος Quick Sort είναι $O(n^2)$ αλλά στην καλύτερη περίπτωση χρειάζεται $\Omega(n\log n)$:
- Τα περισσότερα συστήματα χρησιμοποιούν το Quick Sort (π.χ. Unix) και οι περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού το προσφέρουν σαν μέρος των βασικών βιβλιοθηκών τους πχ. C, JAVA, C++, etc.

Περιγραφή του Quick Sort

- Αν το δεδομένο εισόδου περιέχει 0 ή 1 στοιχεία δεν κάνουμε τίποτα.
- Διαφορετικά, αναδρομικά:
  1. διαλέγουμε ένα στοιχείο **p** (ακόμα δεν ορίζουμε πιο ακριβώς), το οποίο ονομάζουμε το ***άξον*** **(pivot)** στοιχείο και το αφαιρούμε από το δεδομένο εισόδου.
  2. χωρίζουμε τον πίνακα σε δύο μέρη **S1** και **S2**, όπου το **S1** θα περιέχει όλα τα στοιχεία του πίνακα που είναι μικρότερα από το **p**, και το **S2** θα περιέχει τα υπόλοιπα στοιχεία (όλα τα στοιχεία που είναι μεγαλύτερα από το **p**).
  3. Καλούμε αναδρομικά τον αλγόριθμο

     στο **S1**, και παίρνουμε απάντηση το **T1**,

     και

     στο **S2**, και παίρνουμε απάντηση το **T2**.
  4. Επιστρέφουμε τον πίνακα **[T1, p, T2]**.

Βασική Ιδέα του QuickSort

[72, 12, 1, 34, 3, 50, 28, 6, 5, 22, 91, 73]

χωρίζουμε με pivot το 28
(μπορούσε να είναι οποιοδήποτε άλλο στοιχείο)
Θέτουμε αριστερά του pivot τα μικρότερα και δεξιά τα μεγαλύτερα του

[12, 1, 3, 6, 5, 22]   28   [72,34,50,91,73]

Quicksort   Quicksort

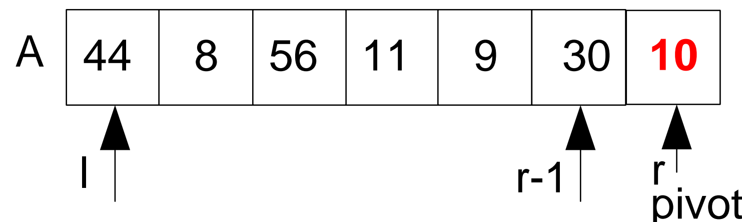
1, 3, 5, 6, 12, 22   **34, 50, 72, 73, 91**

Αποτέλεσμα: 1, 3, 5, 6, 12, 22,   28,   34, 50, 72, 73, 91

Ψευδοκώδικας QuickSort

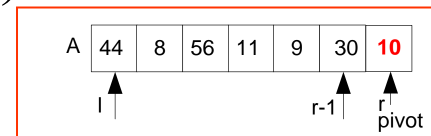
```
void Quicksort(int A[], int l, int r){
   if (l>=r) return;

   int pivotIndex = (l+r)/2;
   int pivot = A[pivotIndex];

   // κάνουμε swap τον pivot με το τελευταίο.
   swap(A, pivotIndex, r);

   /* Η διαδικασία partition χωρίζει τον πίνακα A[l…r-1] έτσι
   ώστε A[l..k-1] να περιέχει στοιχεία < pivot, A[k…r-1] να
   περιέχει στοιχεία >=pivot, και επιστρέφει την τιμή k. */
   int k = partition (A, l, r-1, pivot);

   // κάνουμε swap τον k με το τελευταίο.
   swap(A, k, r);

   Quicksort(A, l, k-1);
   QuickSort(A, k+1, r);
}
```

Εδώ διαλέξαμε τον μεσαίο. Θα μπορούσαμε να είχαμε διαλέξει οποιονδήποτε άλλο



Διαδικασία Partition(A, l, r, p)

- Με δεδομένο εισόδου τον πίνακα A[l…r], και **pivot p**, θέλουμε να χωρίσουμε τον πίνακα σε δύο μέρη ως προς το p.
- Το πιο πάνω πρέπει να επιτευχθεί **χωρίς** τη χρήση δεύτερου πίνακα (το sorting θα γίνει επί τόπου).
- Βασική Ιδέα:



1. Επαναλαμβάνουμε τα εξής μέχρις ότου τα **l** και **r** να διασταυρωθούν.
2. Προχώρα το **r** προς τα **αριστερά** όσο τα στοιχεία που βρίσκεις είναι μεγαλύτερα (ή ίσα) του p,
3. Προχώρα το **l** προς τα **δεξιά** όσο τα στοιχεία που βρίσκεις είναι μικρότερα του **p**,
4. αντάλλαξε τα στοιχεία που δείχνονται από τα **l** και **r.**

Παράδειγμα Εκτέλεσης Partition

Δεδομένο Εισόδου:

index	0	1	2	3	4	5	6	7
	72	6	37	48	30	42	83	75

pivot = 48, μετακίνηση του pivot στο τέλος (swap(4, 8)):

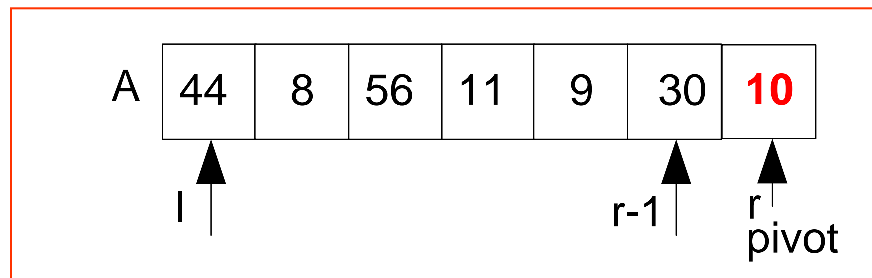
72	6	37	75	30	42	83	48	pivot
l						r		

εκτέλεση του Partition(A, l, r, 48):

72	6	37	75	30	42	83	48
l					r		
42	6	37	75	30	72	83	48
			l	r			
42	6	37	30	75	72	83	48
			l	r			
42	6	37	30	75	72	83	48
			r	l			

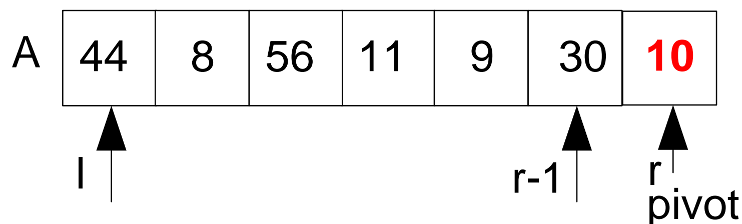
Ο Αλγόριθμος Quicksort στην C

```
void quicksort(int A[], int l, int r) {

   int pivot, pivotIndex;

   if (l>=r) return;

   // Επιλογή του κατάλληλου pivot
   pivotIndex = (l+r)/2;
   pivot = A[pivotIndex];

   // Μετακίνηση του pivot στο τέλος της λίστας
   swap(A, pivotIndex, r);

   /* Κλήση της συνάρτησης partition (η οποία τοποθετεί αριστερά,
   δεξιά τα μικρότερα και μεγαλύτερα στοιχεία αντίστοιχα. */
   pivotIndex = partition(A, l, r-1, pivot);

   // Τοποθέτηση του pivot πίσω στην αρχική του θέση
   if (A[r] < A[pivotIndex])
        swap(A, pivotIndex, r);

   quicksort(A, l, pivotIndex-1);
   quicksort(A, pivotIndex+1, r);
}
```



Η διαδικασία Partition στην C

```
int partition(int A[], int l, int r, int pivot) {

   while(l<r) {
      // προχωρούμε από l στο r μέχρι να χρειαστεί ένα swap
      while (A[l]<pivot && l<r) // leave "<pivot" on left
            l++;
      // προχωρούμε από r στο l μέχρι να χρειαστεί ένα swap
      while (pivot<=A[r] && l<r) //leave ">=pivot" on right
            r--;

      if (l == r) break;

      // τώρα κάνε το swap
      if (A[l]>=pivot)
           swap(A, l, r);  // move ">=" to the right
   }

   // επέστρεψε το σημείο στο οποίο θέλουμε να γίνει η
   // εισαγωγή του pivot
   return l;
}
```



Παράδειγμα Εκτέλεσης QuickSort

```
BEFORE:[72,6,37,48,30,42,83,75]
 Index: 0   1   2   3   4   5   6   7

** QuickSort [0,7]
[72,6,37,48,30,42,83,75,]
PivotIndex: 3(48)  =>   Swapping 48, 75
[72,6,37,75,30,42,83,48,]
Partitioning [0,6]
    Swapping 72, 42
[42,6,37,75,30,72,83,48,]
    Swapping 75, 30
[42,6,37,30,75,72,83,48,]
Inserting Pivot at Position:4
Swapping 75, 48
[42,6,37,30,48,72,83,75,]

** QuickSort [0,3]
[42,6,37,30,48,72,83,75,]
PivotIndex: 1(6)  =>    Swapping 6, 30
[42,30,37,6,48,72,83,75,]
Partitioning [0,2]
Inserting Pivot at Position:0
Swapping 42, 6

** QuickSort [0,-1] -> RETURN
```

```
** QuickSort [1,3]
[6,30,37,42,48,72,83,75,]
PivotIndex: 2(37)   =>   Swapping 37, 42
[6,30,42,37,48,72,83,75,]
Partitioning [1,2]
Inserting Pivot at Position:2
Swapping 42, 37

** QuickSort [1,1] -> RETURN
** QuickSort [3,3] -> RETURN

** QuickSort [5,7]
[6,30,37,42,48,72,83,75,]
PivotIndex: 6(83)   =>   Swapping 83, 75
[6,30,37,42,48,72,75,83,]
Partitioning [5,6] with pivot:83
Inserting Pivot at Position:6

** QuickSort [5,5] -> RETURN
** QuickSort [7,7] -> RETURN

AFTER:[6,30,37,42,48,72,75,83,]
```

Ανάλυση του Χρόνου Εκτέλεσης

- Η **εύρεση του pivot** απαιτεί χρόνο O(1) και η διαδικασία Partition(A, l, r, p) εκτελείται σε **χρόνο O(n)** σε κάθε επίπεδο της αναδρομής.
- Η **αναδρομική εκτέλεση** του QuickSort παίρνει στην χείριστη περίπτωση χρόνο **O(n)** και στην καλύτερη περίπτωση χρόνο **Ω(logn)**

- ***Χείριστη περίπτωση***:

  Κάθε φορά που επιλέγουμε τον pivot όλα τα στοιχεία τυγχάνει να ταξινομούνται είτε **μόνο** αριστερά του (δηλαδή <pivot) ή **μόνο** δεξιά του (δηλαδή >=pivot) πχ 9,9,9,9,9,9,9

  Συνολικός χρόνος εκτέλεσης $\mathbf{T(n) \in O(n^2)}$.

- ***Βέλτιστη περίπτωση***:

  Κάθε φορά που επιλέγουμε τον pivot τα **μισά** στοιχεία ταξινομούνται αριστερά του (δηλαδή <pivot) και τα **υπόλοιπα μισά** δεξιά του (δηλαδή >=pivot) πχ 1,2,3,4,5,6,7

  Συνολικός χρόνος εκτέλεσης $\mathbf{T(n) \in \Omega(n \log n)}$.

Έμμεση Ταξινόμηση (Indirect Sorting)

Έμμεση Ταξινόμηση (Indirect Sorting)

- Οι αλγόριθμου που έχουμε παρουσιάσει υποθέτουν πως οι πίνακες-δεδομένα εισόδου περιέχουν **ακέραιους αριθμούς** και προϋποθέτουν μετακίνηση των στοιχείων μέσα στον πίνακα.

  Τι γίνεται αν θέλουμε να ταξινομήσουμε αρχεία που περιέχουν πολύπλοκα αντικείμενα (π.χ. εγγραφές με πολλαπλές στήλες)?

- Σε τέτοιες περιπτώσεις η μετακίνηση (swapping) στοιχείων είναι δαπανηρή.
- Αυτό μπορεί να αποφευχθεί με τη ***χρήση δεικτών***: ως δεδομένο εισόδου χρησιμοποιούμε **πίνακα που περιέχει δείκτες** στα στοιχεία που θέλουμε να ταξινομήσουμε.
- Σύγκριση και ανταλλαγή γίνεται μεταξύ των δεικτών αντί μεταξύ των ιδίων των αντικειμένων. Έτσι έχουμε λιγότερη μετακίνηση στοιχείων.
- Οποιοσδήποτε από τους αλγόριθμους που αναφέραμε μπορεί να υλοποιηθεί με αυτό τον συλλογισμό χωρίς να αλλάξει ο αλγόριθμος.

Εξωτερική ταξινόμηση (External Sorting)

- **Τι γίνεται αν έχουμε 256MB RAM αλλά θέλουμε να ταξινομήσουμε ένα αρχείο με 800MB έγγραφες?**

- Η ταξινόμηση μπορεί να γίνεται κατά **τμήματα**:
  - Ένα μέρος του αρχείου μεταφέρεται στην κύρια μνήμη, ταξινομείται (**με ένα από τους αλγόριθμους που συζητήσαμε**) και αποθηκεύεται σε ένα προσωρινό αρχείο.
  - Το επόμενο τμήμα μεταφέρεται στην κύρια μνήμη και ταξινομείται και μετά συγχωνεύεται με το προσωρινό αρχείο.
  - Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι εξάντλησης του αρχικού αρχείου.

- Με βάση αυτή την κύρια ιδέα υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι εξωτερικής ταξινόμησης. Κύριος στόχος τους είναι η αποδοτική επεξεργασία της δευτερεύουσας μνήμης (δηλαδή του μαγνητικού δίσκου).

- Τέτοιοι αλγόριθμοι βρίσκουν εφαρμογές σε Βάσεις Δεδομένων