Διάλεξη 17: Δυαδικά Δέντρα

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Δυαδικά Δένδρα

Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης

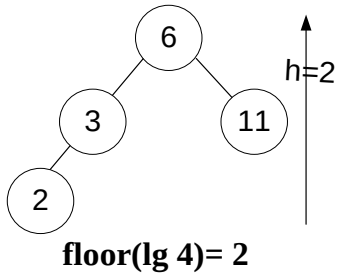
Πράξεις Εισαγωγής, Εύρεσης Στοιχείου, Διαγραφής Μικρότερου Στοιχείου

Διδάσκων: Δημήτρης Ζεϊναλιπούρ

Δυαδικά Δένδρα

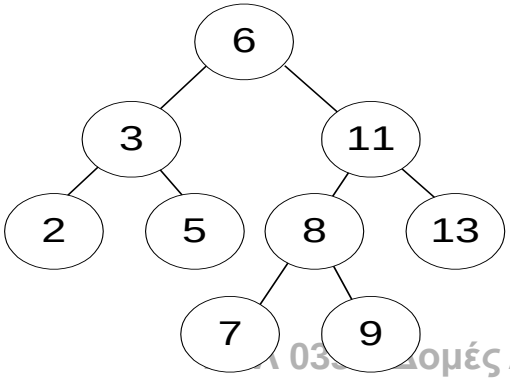
- Ένα δένδρο είναι **δυαδικό** αν όλοι οι κόμβοι του έχουν **βαθμό** ≤ 2.

  Ορισμός: Δυαδικό δένδρο λέγεται ένα δένδρο το οποίο :
  - είτε είναι κενό,
  - ή αποτελείται από μια **ρίζα** και **δύο δυαδικά υπόδενδρα**. Αναφερόμαστε στα δύο υπόδενδρα ως το **αριστερό** και το **δεξιό υπόδενδρο**.

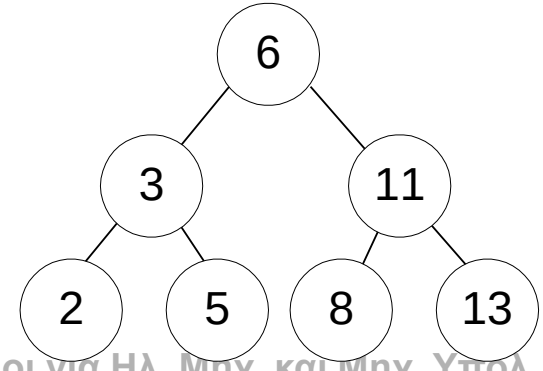


floor(lg 4)= 2

- Το ύψος ενός δυαδικού δένδρου με **n** κόμβους μπορεί να είναι το πολύ : **n-1 (συνδεδεμένη λίστα)** και το λιγότερο **⌊lg n⌋.**
- Ένα δυαδικό δένδρο είναι **γεμάτο (full),** αν κάθε εσωτερικός του κόμβος έχει δύο απογόνους.
- Ένα δυαδικό δένδρο είναι **τέλειο (perfect),** αν είναι γεμάτο και όλοι του οι κόμβοι που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο έχουν το ίδιο βάθος.

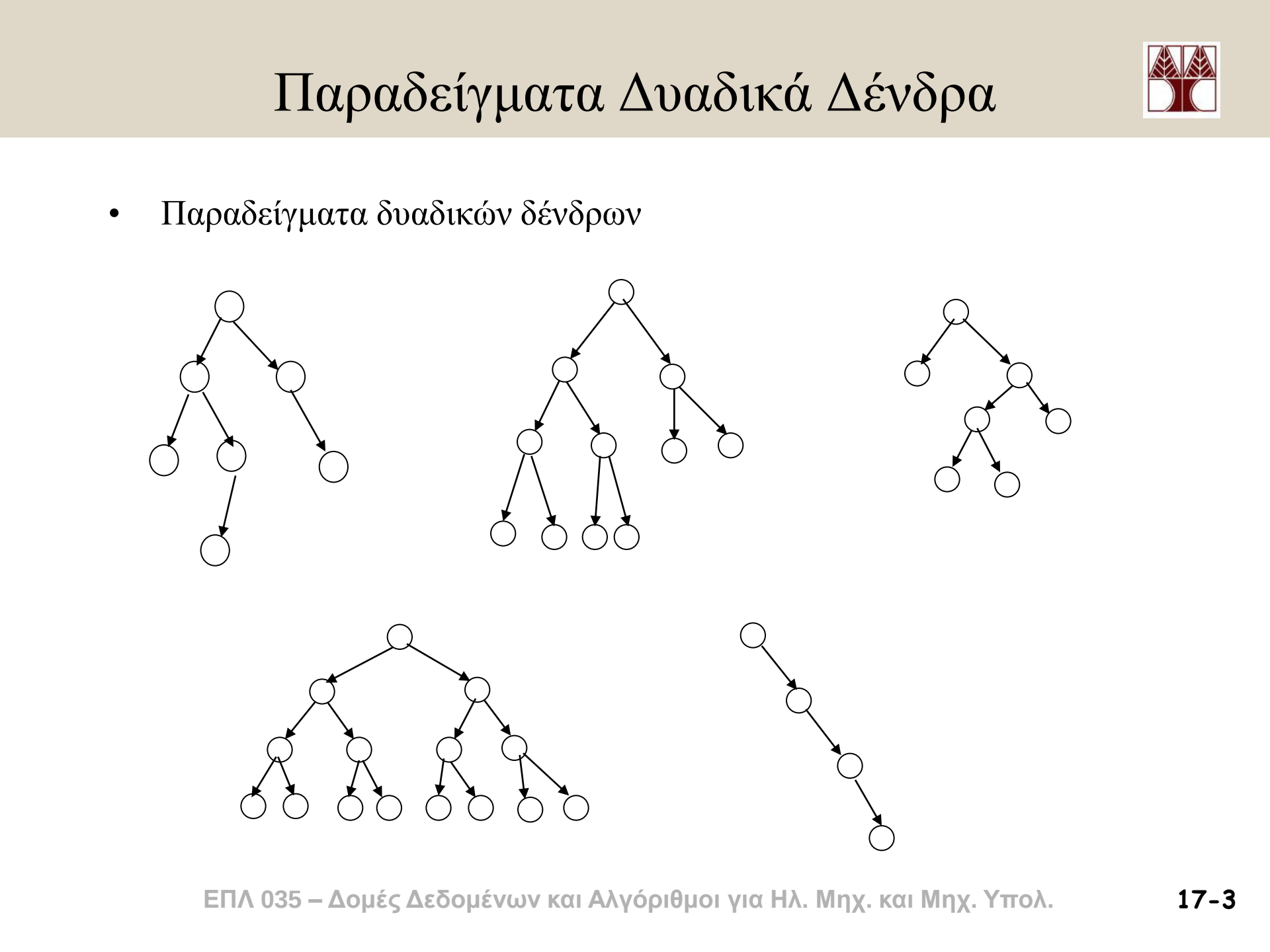


FULL



PERFECT

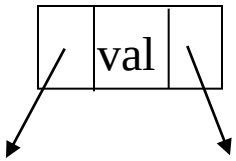
Παραδείγματα Δυαδικά Δένδρα



- Παραδείγματα δυαδικών δένδρων

Υλοποίηση Δυαδικών Δένδρων

- Αφού κάθε κόμβος σε ένα δυαδικό δένδρο έχει το πολύ δύο παιδιά, μπορούμε να κρατούμε δείκτες στο καθένα από αυτά.
- Δηλαδή, ένας κόμβος μπορεί να υλοποιηθεί ως μια εγγραφή NODE με τρία πεδία (παρόμοια με κόμβο διπλά συνδεδεμένης λίστας).
  1. **`val`**, όπου αποθηκεύουμε την πληροφορία του κόμβου,
  2. **`left`**, τύπου pointer, ο οποίος δείχνει το αριστερό, υπόδενδρο που ριζώνει στον συγκεκριμένο κόμβο, και
  3. **`right`**, τύπου pointer, ο οποίος δείχνει το δεξιό υπόδενδρο που ριζώνει στον συγκεκριμένο κόμβο.




```
typedef struct node {
        int val;
        struct node *left;
        struct node *right;
} NODE;
```

- Έτσι, ένα δυαδικό δένδρο υλοποιείται ως ένας δείκτης στη ρίζα του δένδρου, δηλαδή δείκτης σε εγγραφή τύπου NODE.

```
NODE *root;
```

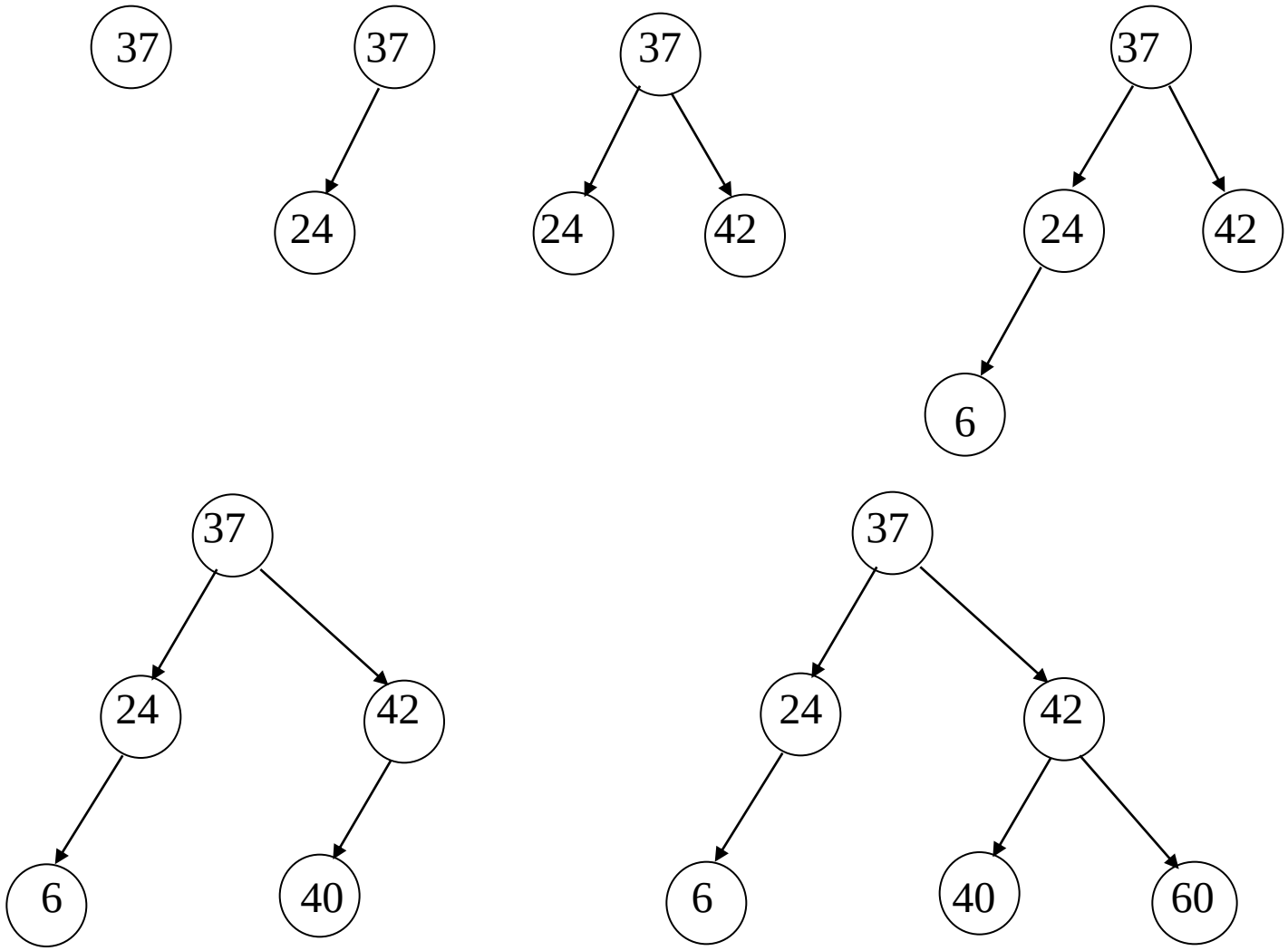
Δυαδικά Δένδρα Αναζήτησης ΔΔΑ (Binary Search Trees)

- Το πιο σημαντικό πλεονέκτημα της χρήσης δυαδικών δένδρων η αποδοτική αναζήτηση σε ένα σύνολο στοιχείων

- Υποθέτουμε την ύπαρξη μιας σχέσης στο σύνολο των στοιχείων που επεξεργαζόμαστε, έστω τη σχέση < πάνω στο σύνολο των ακεραίων.

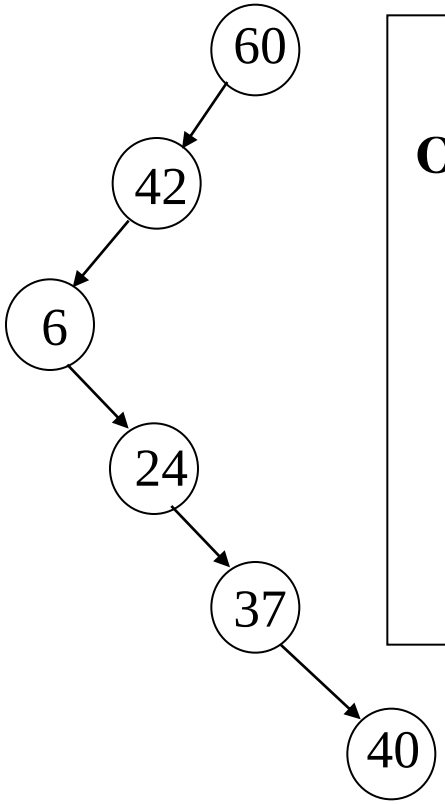
- **Ένα *δυαδικό δένδρο αναζήτησης* (ΔΔΑ) είναι ένα δυαδικό δένδρο κάθε κόμβος u του οποίου ικανοποιεί τα εξής:**
  1. **τα κλειδιά του αριστερού υποδένδρου του u είναι μικρότερα από το κλειδί του u**
  2. **τα κλειδιά του δεξιού υποδένδρου του u είναι μεγαλύτερα (ή ίσο) από το κλειδί του u.**

Παράδειγμα Κτισίματος ενός ΔΔΑ



Κτίζοντας ένα ΔΔΑ

Δένδρο με τα ίδια στοιχεία τοποθετημένα με διαφορετική σειρά: 60, 42, 6, 24 37, 40.



Ποιο είναι το χειρότερο σενάριο?

Οι τιμές εισόδου φθάνουν με την ακόλουθη σειρά

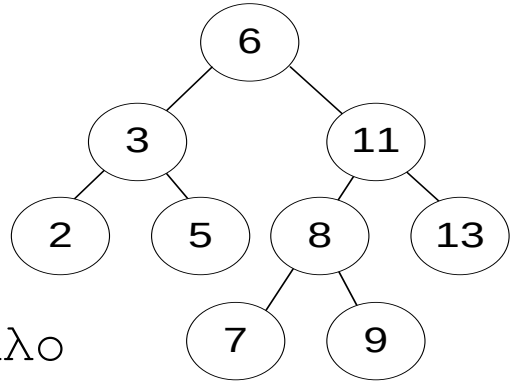
60,42,40,37,24,6 (φθίνουσα σειρά)

ή

6,24,37,40,42,60 (αύξουσα σειρά)

Αυτές οι δυο τιμές εισόδου παράγουν μια συνδεμένη λίστα

Εύρεση Μεγέθους ΔΔΑ



- **Αναδρομική Υλοποίηση**

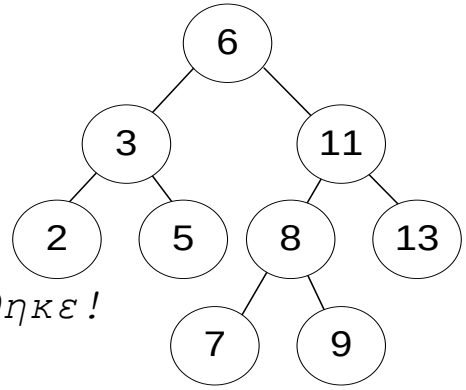
```
int size(NODE *root)
{
   // τερματίζουμε αν βρήκαμε  κόμβο φύλλο
   if (root == NULL) {
       return 0;
   }
   return (size(root->left) + 1 + size(root->right));
}
```

- Σημειώστε ότι η μη-αναδρομική υλοποίηση χρειάζεται την χρήση μιας βοηθητικής δομής (π.χ. στοίβας)
- Όμως η αναδρομική υλοποίηση είναι πιο εύκολα κατανοητή

Διαδικασία Εύρεσης Στοιχείου – **FindNode()**

- Απλή αναδρομική στρατηγική: συγκρίνουμε το στοιχείο που μας ενδιαφέρει α με το στοιχείο της ρίζας του δένδρου β (αν υπάρχει) και
  1. αν α=β, σταματούμε,
  2. αν α<β, προχωρούμε στο αριστερό υπόδενδρο,
  3. αν α>β προχωρούμε στο δεξιό υπόδενδρο.

Χείριστη περίπτωση O(n)
(εάν έχουμε λίστα)



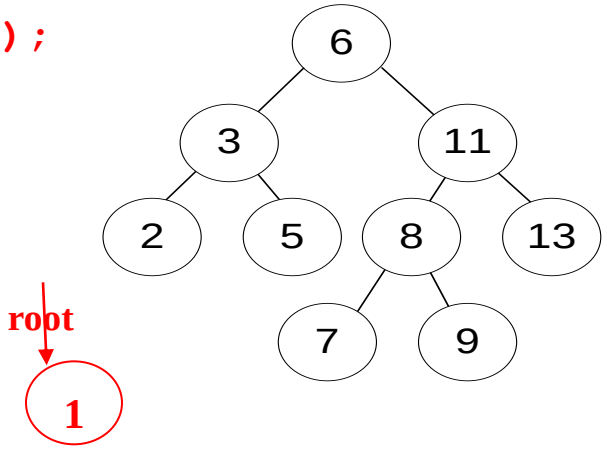

```
NODE *FindNode(NODE *root, int val) {

   if (root == NULL)
        return NULL;    // το στοιχείο δεν βρέθηκε
   else if (root->val == val) // το στοιχείο βρέθηκε!
        return root;
   else {  // ακόμα δεν βρέθηκε το στοιχείο
        if (val < root->val)
                return FindNode(root->left, val);
        else
                return FindNode(root->right, val);
   }
}
```

Διαδικασία Εισαγωγής Κόμβου – **InsertNode()**

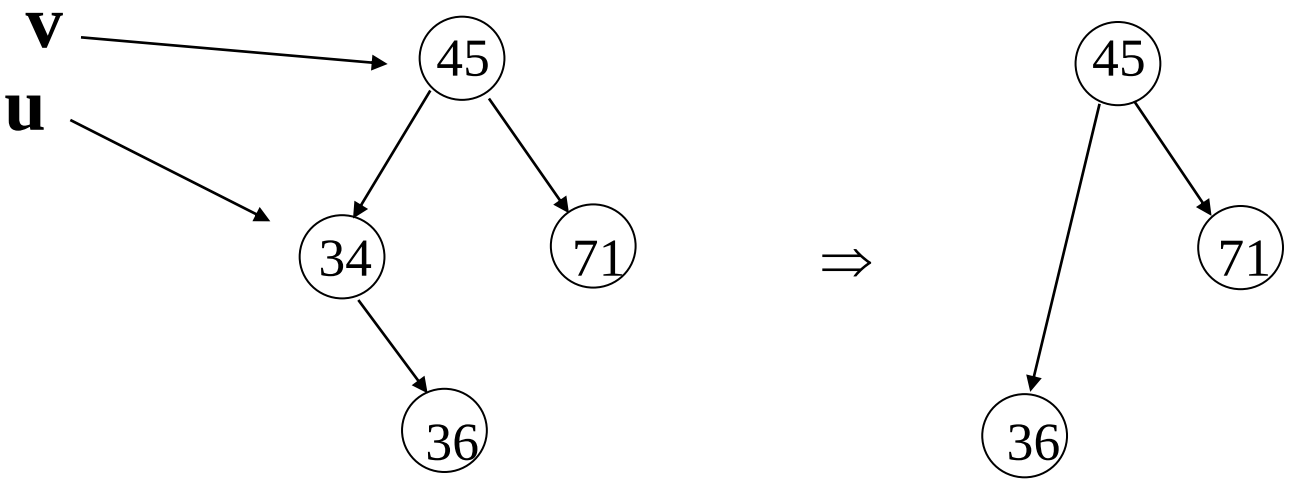
```
NODE *InsertNode(NODE *root, int val){
   if (root == NULL) { // εισαγωγή κόμβου
        root = (NODE *) malloc(sizeof(NODE));
        if (root==NULL) {
                printf("Out of Memory!");
                exit(1);
        }
        root->val = val;
        root->left = NULL;
        root->right = NULL;
   }
   else {
        if (val < root->val)              // εισαγωγή αριστερά
                root->left  = InsertNode(root->left, val);
        else                              // εισαγωγή δεξιά
                root->right = InsertNode(root->right, val);
   }

   return root;
}
```



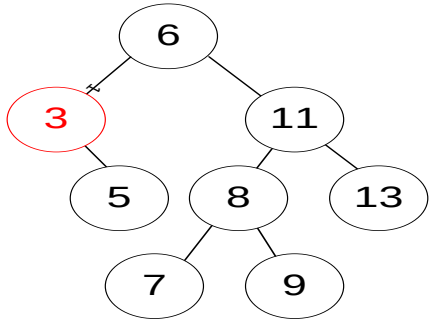
Εξαγωγή του μικρότερου κόμβου – **DeleteMin()**

1. **Ακολουθούμε τους αριστερούς δείκτες** όσο μπορούμε, φθάνοντας στον κόμβο με το μικρότερο **στοιχείο, u.**
2. Βρίσκουμε τον πατέρα **v του u** και αλλάζουμε τον αριστερό δείκτη του v ώστε να δείχνει στο δεξιό παιδί του u.



Εξαγωγή του μικρότερου κόμβου

```
NODE *deleteMin(NODE *root) {
   NODE *p;
   if (root == NULL) {
     // μικρότερο στοιχείο δεν βρέθηκε
     return NULL;      // πχ αν είναι κενό το δένδρο
   }
   else if (root->left == NULL) {
       // φτάσαμε στο μικρότερο
       p = root;
       root = root->right;
       free(p);
   }
   else {// αναδρομική προχώρησε προς τα αριστερά
       root->left = deleteMin(root->left);
   }
   return root;
}
```

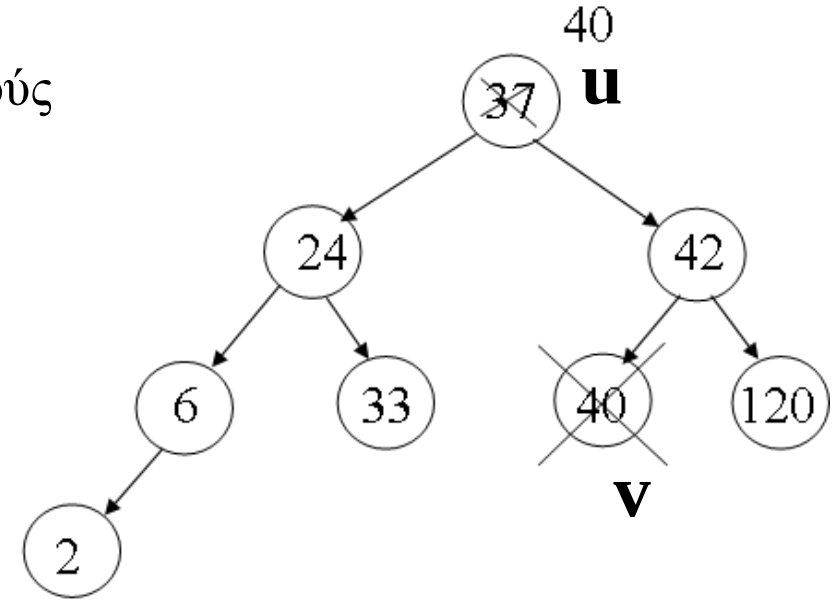


Διαγραφή κόμβου i (μόνο η ιδέα)

Για να αφαιρέσουμε ένα κλειδί **X** από ένα ΔΔΑ:

1. Βρίσκουμε τον κόμβο **u** που περιέχει το **X.**
2. Πριν διαγράψουμε τον **u** βρίσκουμε τον μικρότερο (από δεξιά) **απόγονο του (τον οποίο ονομάζουμε v)**.
3. Η ιδέα είναι ότι ο **v** πρέπει να αντικαταστήσει τον **u!**

Η υλοποίηση γίνεται πιο απλή χρησιμοποιώντας επαναληπτικούς βρόγχους παρά αναδρομή.



Σύγκριση Δυαδικών Δένδρων

Να γραφεί μια συνάρτηση η οποία να επιστρέφει "1" αν δυο δυαδικά δένδρα είναι τα ίδια και "0" στην αντίθετη περίπτωση

```
int sameTree(NODE *a, NODE *b) {

  // και τα δυο δένδρα είναι κενά => άρα επιστρέφουμε TRUE
  if (a==NULL && b==NULL)
         return 1;

  // και τα δυο δένδρα δεν είναι κενά – συγκρίνουμε τις ρίζες τους
  else if (a!=NULL && b!=NULL) {
    return(
      (a->data == b->data)
      &&
      sameTree(a->left, b->left)
      &&
      sameTree(a->right, b->right)
    );
  }

  // το ένα εκ των δυο υπό-δένδρων είναι κενό => επιστρέφουμε FALSE
  else return 0;
}
```